

# 國立陽明交通大學應用數學系

## 115 學年度大學申請入學考試試題

說明：

- (1) 答題前，請先檢查答案本封面上之編號是否與座位上之編號相符。
- (2) 本試卷共五題計算證明題，總分共計 100 分，測驗時間為 100 分鐘。
- (3) 答題時，必須寫下解題過程；若是僅有答案，則該題不予計分。
- (4) 請依題號順序作答。
- (5) 繳卷時，請同時繳回題目卷。

第一題 (20%)

令  $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$  為  $2 \times 2$  的矩陣， $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$  為  $4 \times 4$  的矩陣。

- (1) (2%) 請求出  $A$  的反矩陣  $A^{-1}$ 。
- (2) (6%) 對於任意正整數  $n$ ，請求出  $A^n$ 。
- (3) (4%) 請求出  $B$  的反矩陣  $B^{-1}$ 。
- (4) (8%) 對於任意正整數  $n$ ，請求出  $B^n$  的反矩陣  $B^{-n}$ 。

**第二題** (20%) 令  $A$  為一給定的正實數， $a_1$  為一給定的負實數。對所有正整數  $n$ ，定義遞迴式如下：

$$a_{n+1} = \frac{A}{a_n} - 1。$$

- (1) (6%) 如果對任何正整數  $n$ ，我們有  $\alpha \leq a_n$ ，則稱實數  $\alpha$  為數列  $\langle a_n \rangle$  的一個下界；如果對任何正整數  $n$ ，我們有  $\beta \geq a_n$ ，則稱實數  $\beta$  為數列  $\langle a_n \rangle$  的一個上界。請問題目中的數列  $\langle a_n \rangle$  是否分別有上界和下界？請證明你的主張。
- (2) (10%) 如果對任何正整數  $n$ ，我們有  $a_n < a_{n+1}$ ，則稱數列  $\langle a_n \rangle$  是一個嚴格遞增數列；如果對任何正整數  $n$ ，我們有  $a_n > a_{n+1}$ ，則稱數列  $\langle a_n \rangle$  是一個嚴格遞減數列。請問題目中的數列  $\langle a_n \rangle$  是否為嚴格遞增或嚴格遞減？請證明你的主張。
- (3) (4%) 請求出  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  的值。

**第三題** (20%) 令  $O$  為座標平面上的原點， $P$ 、 $Q$  為下列平面上的動點

$$P(4 \cos \theta, 4 \sin \theta), \quad Q(4 \cos \theta + \cos(5\theta), 4 \sin \theta + \sin(5\theta))$$

其中  $\frac{\pi}{8} < \theta < \frac{\pi}{3}$ 。

(1) (5%) 請證明下列等式：

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

其中  $0 \leq \beta < \alpha < 2\pi$  且  $0 < \alpha - \beta < \pi$ 。

(2) (7%) 請求出線段  $\overline{OQ}$  的最小值，以及該最小值出現時  $\theta$  為何？

(3) (8%) 請問  $O$ 、 $P$ 、 $Q$  三點共線時  $\theta$  為何？

**第四題** (20%) 令  $O$  為座標平面上的原點， $A(-1,0)$ 、 $B(2,1)$  為平面上的兩個點，設方程式

$$x^2 + y^2 + 8x - 10y + 32 = 0$$

為平面上的圓  $C$ 。

- (1) (4%) 求圓  $C$  的圓心與半徑。
- (2) (10%) 令  $P$  為圓  $C$  上的動點， $G$  為三角形  $ABP$  的重心。請問  $P$  點在圓  $C$  上移動時， $G$  點的軌跡所形成的形狀為何？
- (3) (6%) 請問有多少個  $P$  點使的三角形  $ABP$  為直角三角形？

**第五題** (20%) 令  $B$  為一隨機變數，並假設  $B$  的機率分布是成功率為  $1/2$  的幾何分布。針對雙曲線

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{B^2} = 1$$

請回答下列問題。

- (1) (5%) 請問貫軸長小於共軛軸長的機率為何？
- (2) (5%) 在已知貫軸長不小於共軛軸長的條件下，貫軸長等於共軛軸長的條件機率為何？
- (3) (5%) 請問貫軸長不小於共軛軸長的事件，與貫軸長不大於共軛軸長的事件是否獨立？
- (4) (5%) 請問共軛軸長的期望值為何？